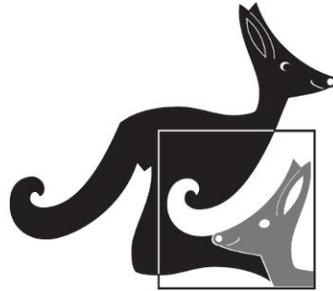


به نام خدا  
از ریاضیات لذت ببریم



دفترچهٔ سئوالات  
هشتمین دورهٔ مسابقهٔ بین‌المللی  
ریاضیات کانگورو ۱۳۹۵  
پایه‌های سوم دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

۳ امتیاز	مسئله‌های ۱ تا ۱۰
۴ امتیاز	مسئله‌های ۱۱ تا ۲۰
۵ امتیاز	مسئله‌های ۲۱ تا ۳۰

## مسئله‌های ۳ امتیازی

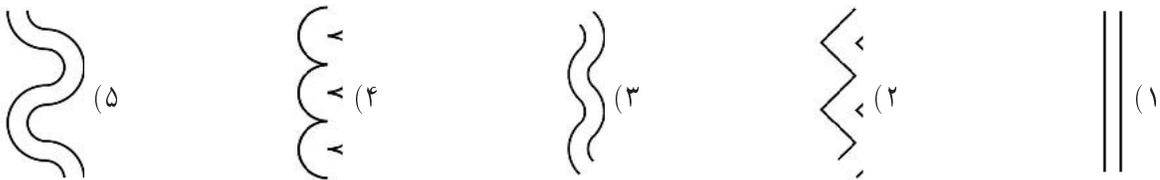
۱. حاصل جمع سن آرش و بهزاد ۲۳ است، حاصل جمع سن بهزاد و پدرام ۲۴ است و حاصل جمع سن آرش و پدرام ۲۵ است. بچه‌ای که از همه بزرگتر است چند ساله است؟

- ۱۰ (۱)      ۱۱ (۲)      ۱۲ (۳)      ۱۳ (۴)      ۱۴ (۵)

۲. حاصل عبارت  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$  کدام است؟

- $\frac{3}{1110}$  (۱)       $\frac{111}{1110}$  (۲)       $\frac{111}{1000}$  (۳)       $\frac{3}{1000}$  (۴)       $\frac{3}{1110}$  (۵)

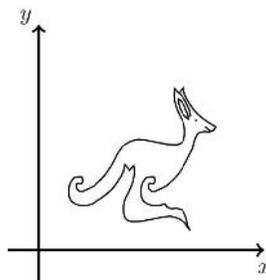
۳. مریم می‌خواهد پلی روی یک رودخانه بسازد. او می‌داند که کوتاه‌ترین طول ممکن برای پلی که نقطه‌ای دلخواه در یک طرف رودخانه را به طرف دیگر وصل می‌کند ثابت است. کدام شکل نمی‌تواند شکل چنین رودخانه‌ای باشد؟



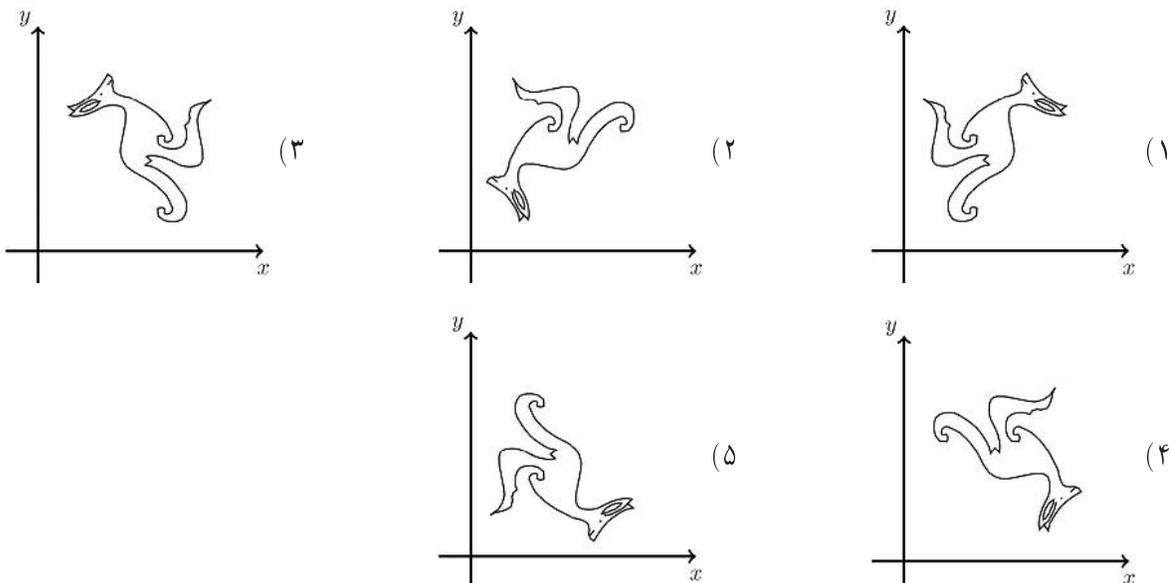
۴. چند عدد صحیح از  $2017 \times 2015$  بزرگ‌ترند ولی از  $2016 \times 2016$  کوچک‌ترند؟

- ۰ (۱)      ۱ (۲)      ۲۰۱۵ (۳)      ۲۰۱۶ (۴)      ۲۰۱۷ (۵)

۵. در شکل، مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه را مشخص کرده‌ایم که یک کانگورو تشکیل می‌دهد:



به ازای هر نقطه، طول و عرض آن نقطه را با هم جابه‌جا می‌کنیم. کدام شکل به دست می‌آید؟



۶. برای محصور کردن ناحیه‌ای کران‌دار در فضای سه‌بعدی، حداقل چند صفحه لازم داریم؟

۷ (۵)

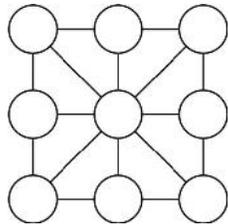
۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۷. دانا می‌خواهد در دایره‌های شکل طوری عددهای طبیعی را بنویسد که حاصل جمع عددهایی که در رأس‌های هشت مثلث کوچک نوشته شده‌اند با هم برابر باشند. او حداکثر چند عدد طبیعی متمایز را می‌تواند در این دایره‌ها بنویسد؟



۸ (۵)

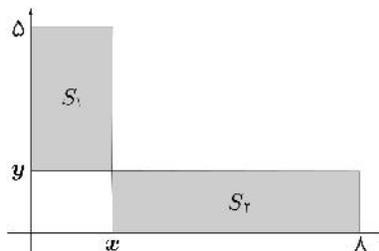
۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۸. در شکل، مساحت مستطیل‌های  $S_1$  و  $S_2$  با هم برابر است. مقدار  $\frac{x}{y}$  چقدر است؟

 $\frac{8}{5}$  (۵) $\frac{7}{4}$  (۴) $\frac{4}{3}$  (۳) $\frac{3}{2}$  (۲)

۱ (۱)

۹. اگر  $x^2 - 4x + 2 = 0$ ، مقدار  $x + \frac{2}{x}$  چقدر است؟

۴ (۵)

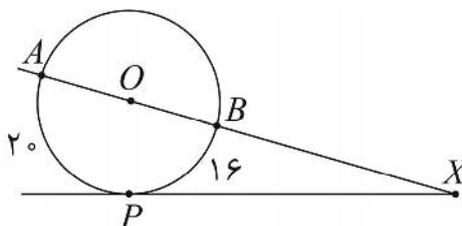
۲ (۴)

۰ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

۱۰. در شکل، طول کمان  $AP$  برابر  $20^\circ$  و طول کمان  $BP$  برابر  $16$  است. اندازه‌ی زاویه‌ی  $AXP$  چقدر است؟

 $10^\circ$  (۵) $15^\circ$  (۴) $18^\circ$  (۳) $24^\circ$  (۲) $30^\circ$  (۱)

### ۳ مسئله‌های امتیازی

۱۱. عددهای طبیعی متمایز  $a, b, c, d$  در رابطه‌ی  $a + 2 = b - 2 = c \times 2 = d \div 2$  صدق می‌کنند. کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

c (۳)

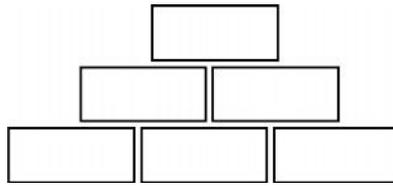
b (۲)

a (۱)

(۵) به‌طور یکتا مشخص نمی‌شود.

d (۴)

۱۲. در شکل زیر، عدد هر خانه برابر حاصل ضرب دو خانه‌ی زیرش است. اگر بدانیم سه خانه‌ی پایین‌ترین ردیف طبیعی و بزرگ‌تر از یک هستند، کدام عدد ممکن نیست در بالاترین خانه به دست بیاید؟



- ۵۶ (۱)      ۸۴ (۲)      ۹۰ (۳)      ۱۰۵ (۴)      ۲۲۰ (۵)

۱۳. فرض کنید  $x_1 = 2$  و به ازای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک مانند  $n$ ،  $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ . مقدار  $x_4$  کدام است؟

- ۲۲۳ (۱)      ۲۲۴ (۲)      ۲۲۱۱ (۳)      ۲۲۱۶ (۴)      ۲۲۷۶۸ (۵)

۱۴. در مستطیل  $ABCD$ ، طول ضلع  $BC$  نصف طول قطر  $AC$  است. فرض کنید  $M$  نقطه‌ای روی  $CD$  است که  $AM = MC$ . اندازه‌ی زاویه‌ی  $CAM$  چقدر است؟

- ۱۲٫۵° (۱)      ۱۵° (۲)      ۲۷٫۵° (۳)      ۴۲٫۵° (۴)      مقدار دیگری (۵)

۱۵. حمید می‌خواهد مستطیلی به مساحت  $۲۰۱۶$  با اضلاع طبیعی بسازد و آن را به  $۵۶$  مربع هم‌اندازه با اضلاع طبیعی تقسیم کند. او چند مستطیل با این خاصیت می‌تواند بسازد؟

- ۲ (۱)      ۴ (۲)      ۶ (۳)      ۸ (۴)      ۰ (۵)

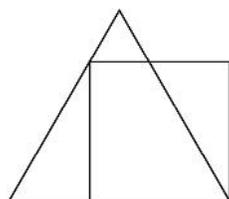
۱۶. در جزیره‌ی جوانمردان و دون‌همتان، هر کدام از ساکنان یا جوانمرد است و همیشه راست می‌گوید، یا دون‌همت است و همیشه دروغ می‌گوید. در سفری به این جزیره، هفت نفر را دیدم که دور آتش نشسته بودند و همه می‌گفتند «من بین دو دون‌همت نشسته‌ام!» چند نفرشان دون‌همت بودند؟

- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۵ (۳)      ۶ (۴)      داده‌ها کافی نیست. (۵)

۱۷. هر دو معادله‌ی  $x^2 + ax + b = 0$  و  $x^2 + bx + a = 0$  ریشه‌های حقیقی دارند. اگر بدانیم  $a \neq b$  و حاصل جمع مربعات ریشه‌های اولی با حاصل جمع مربعات ریشه‌های دومی برابر است، مقدار  $a + b$  چقدر است؟

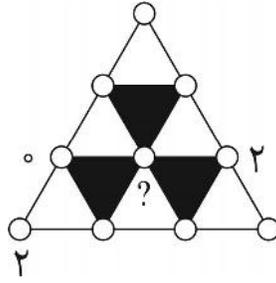
- ۰ (۱)      -۲ (۲)      ۴ (۳)      -۴ (۴)      نمی‌توان معین کرد. (۵)

۱۸. اگر در شکل زیر محیط مربع برابر ۴ باشد، محیط مثلث متساوی‌الاضلاع چقدر است؟



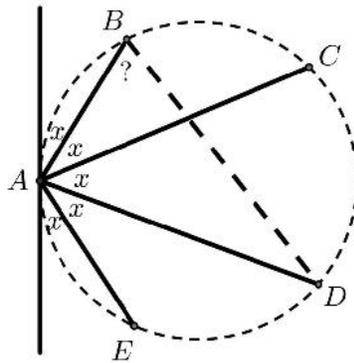
- ۴ (۱)       $۳ + \sqrt{۳}$  (۲)      ۳ (۳)       $۳ + \sqrt{۲}$  (۴)       $۴ + \sqrt{۳}$  (۵)

۱۹. هر کدام از ده نقطه‌ی شکل زیر را با یکی از عددهای  $0$  یا  $1$  یا  $2$  علامت‌گذاری کرده‌ایم. می‌دانیم که حاصل جمع سه رأس هر مثلث سفیدی بر  $3$  بخش‌پذیر است و حاصل جمع عددهای سه رأس هیچ مثلث سیاهی بر  $3$  بخش‌پذیر نیست. عددهای روی سه نقطه را در شکل مشخص کرده‌ایم. چه عددهایی را می‌توانیم روی نقطه‌ی مرکزی بنویسیم؟



- (۱) فقط  $0$  (۲) فقط  $1$  (۳) فقط  $2$   
 (۴) فقط  $0$  و  $1$  (۵) هر کدام از  $0$  یا  $1$  یا  $2$

۲۰. سارا نقطه‌ی  $A$  را روی دایره انتخاب کرد و مماس بر دایره را در آن نقطه کشید، و بعد نقطه‌های  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  را طوری روی دایره انتخاب کرد که اندازه‌ی همه‌ی زاویه‌هایی که با  $x$  مشخص شده‌اند با هم برابر باشد (توجه کنید که شکل ممکن است دقیق نباشد). اندازه‌ی زاویه‌ی  $ABD$  چقدر است؟



- (۱)  $66^\circ$  (۲)  $70,5^\circ$  (۳)  $72^\circ$   
 (۴)  $75^\circ$  (۵)  $77,5^\circ$

### مسئله‌های امتیازی

۲۱. معادله‌ی

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 3} = 1$$

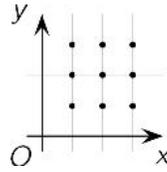
چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) بی‌شمار

۲۲. چهارضلعی‌ای بر دایره‌ای محیط است. نسبت محیط چهارضلعی به محیط دایره برابر  $\frac{4}{3}$  است. نسبت مساحت چهارضلعی به مساحت دایره چقدر است؟

- (۱)  $\frac{4}{\pi}$  (۲)  $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$  (۳)  $\frac{16}{9}$  (۴)  $\frac{\pi}{3}$  (۵)  $\frac{4}{3}$

۲۳. نمودار چند تابع درجه دو بر حسب  $x$  اقلأ از سه تا از نقطه‌های مشخص شده می‌گذرد؟



۲۷ (۵)

۲۲ (۴)

۱۹ (۳)

۱۵ (۲)

۶ (۱)

۲۴. در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  (زاویه  $A$  قائمه است) نیمسازهای زاویه‌های حاده یکدیگر را در  $P$  قطع می‌کنند. اگر فاصله  $P$  از وتر برابر  $\sqrt{8}$  باشد، فاصله  $P$  از  $A$  چقدر است؟

۴ (۵)

 $\sqrt{12}$  (۴) $\sqrt{10}$  (۳)

۳ (۲)

۸ (۱)

۲۵. با همه‌ی رقم‌های ۱ تا ۹، سه عدد سه‌رقمی ساخته‌ایم. کدام عدد نمی‌تواند حاصل جمع این سه عدد باشد؟

۱۵۷۵ (۵)

۱۵۲۱ (۴)

۱۵۱۲ (۳)

۱۵۰۳ (۲)

۱۵۰۰ (۱)

۲۶. نقطه‌ای را داخل مکعبی انتخاب کرده‌ایم و با وصل کردن آن به رأس‌های مکعب، شش هرم به دست آورده‌ایم. حجم پنج هرم از این شش هرم عبارت‌اند از ۲، ۵، ۱۰، ۱۱ و ۱۴. حجم هرم ششم چقدر است؟

۱۲ (۵)

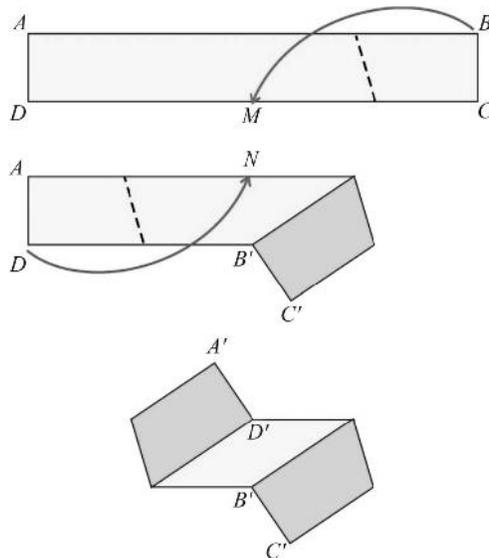
۹ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

۲۷. عرض نوار کاغذی مستطیلی  $ABCD$  برابر  $5\text{ cm}$  و طول آن برابر  $5^\circ\text{ cm}$  است. یک روی این نوار سفید است و روی دیگرش خاکستری. مریم این نوار را مطابق شکل طوری تا می‌کند که نقطه‌ی  $B$  روی نقطه‌ی  $M$  (که وسط  $CD$  است) بیفتد، و مجدداً نوار را طوری تا می‌کند که نقطه‌ی  $D$  روی نقطه‌ی  $N$  (که وسط  $AB$  است) بیفتد. مساحت بخش سفید که در شکل دیده می‌شود چند سانتی‌متر مربع است؟



۱۲۵ (۵)

۱۰۰ (۴)

۶۲٫۵ (۳)

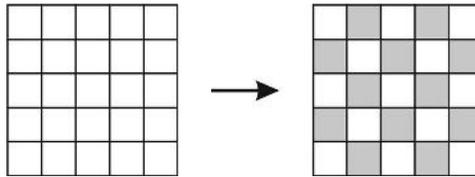
۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

۲۸. لیلا عدد طبیعی  $n$  را انتخاب کرد و حاصل جمع عددهای طبیعی ۱ تا  $n$  (با خود ۱ و  $n$ ) را حساب کرد. عددی اول مانند  $p$  وجود داشت که حاصل جمع بر آن بخش‌پذیر بود؛ اما هیچ‌کدام از عددهای ۱ تا  $n$  بر آن بخش‌پذیر نبودند. کدام مقدار ممکن است  $n + p$  باشد؟

- (۱) ۲۱۷ (۲) ۲۲۱ (۳) ۲۲۹ (۴) ۲۴۵ (۵) ۲۶۹

۲۹. مربعی  $۵ \times ۵$  را به ۲۵ خانه تقسیم کرده‌ایم. در ابتدا، همه‌ی خانه‌ها سفید هستند. در هر حرکت، می‌توانیم رنگ سه خانه‌ی متوالی در یک سطر یا یک ستون را برعکس کنیم (یعنی هر خانه‌ی سفید را سیاه کنیم و هر خانه‌ی سیاه را سفید). حداقل چند حرکت لازم داریم که شکل طرف چپ را به شکل طرف راست تبدیل کنیم؟



- (۱) کم‌تر از ۱۰ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) بیش‌تر از ۱۲ (۵) این کار ممکن نیست.

۳۰. عدد طبیعی  $N$  دقیقاً شش مقسوم‌علیه طبیعی (با خود ۱ و  $N$ ) دارد. حاصل ضرب پنج تا از این عددها برابر ۶۴۸ است. ششمین مقسوم‌علیه  $N$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲ (۵) ۲۴